Wiederholung

1. Aufgabe:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ $\mathbb{Q}$ ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ weder offen, noch abgeschlossen.
- ☐ Jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit unendlich vielen Elementen ist überabzählbar.
- ☐ Jede Folge mit nur einem Häufungspunkt ist konvergent.
- ☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ konvergiert genau dann, wenn (x_n) konvergiert.
- ☐ Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ absolut, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Aufgabe: (*Vollständige Induktion*)

a) Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

b) Zeigen Sie für

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die n-te Ableitung von f gleich

$$(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} + (n-1)!(1-x)^{-n}$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$.

3. Aufgabe: (*Zahlenfolgen*)

Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit Grenzwert $a > 0$. Beweisen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ auch $a_n > 0$ gilt.
Zusatz: Gilt auch die Umkehrung? Folgt aus der Tatsache, dass $a_n > 0, \forall\, n \geq N$, gilt, dass (a_n) gegen einen Grenzwert $a > 0$ konvergiert?

4. Aufgabe: (*Reihen*)

a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{-n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n^5}{6n^8+\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n-n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^3}$$

Hinweis: $\log(n) \leq n$ und log ist der natürliche Logarithmus.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen? Für welche konvergieren sie absolut?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

5. Aufgabe: (*Komplexe Folgen und Reihen*)

a) Sei die komplexe Folge (a_n) mit

$$a_n = \left(\frac{i}{3-i}\right)^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

gegeben. Begründen Sie, dass (a_n) und $\sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergieren.

b) Zeigen Sie, dass die Folge (b_n) mit

$$b_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

keine Cauchyfolge ist.

6. Aufgabe: (*Die Exponentialreihe*)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit den Reihendarstellungen der Exponential- und der Kosinus-Funktion.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x^2)}-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\cos(x)-1}$$

Welche Methode gibt es noch, um die Grenzwerte zu berechnen?

Integration

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Die Ableitung der Funktion $G : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \int_1^{1/x} \frac{e^t}{t} dt$$

ist $G'(x) = \frac{-e^x}{x^3}$.

- ☐ Wenn f^2 Riemann-integrierbar in $[a, b]$ ist, dann ist auch f Riemann-integrierbar.
- ☐ Wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x > 0$ gilt und

$$\int_0^\infty g(x)\ dx$$

konvergiert, dann konvergiert auch

$$\int_0^\infty f(x)\ dx$$

2. Aufgabe: (*Substitution und partielle Integration*)

Berechnen Sie folgende Integrale (Dabei ist $\ln(x)$ der natürliche Logarithmus)

$$\int_0^1 e^{3x} \sin(2x)\ dx \qquad \int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}\ dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\ dx$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\ dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)^3}{1 + \sin(x)}\ dx$$

3. Aufgabe: (*Uneigentliche Integrale*)

Existieren folgende uneigentliche Integrale? Begründen Sie.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\ dx \qquad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\ dx \qquad \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$$

4. Aufgabe: (*Kurven und ihre Länge*)

Sei die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) := (\cosh(t), \sinh(t), t)$ gegeben. Berechnen Sie die Länge von γ.

Hinweis: $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$ und

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

5. Aufgabe: (*Kurvenintegrale, Lehramts-Aufgabe*)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{8x^2 + 3y^2}$$

bzgl. der Kurve $\gamma = \varphi([0,1])$ mit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 2t)^\top$.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art von $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

bzgl. der Kurve $\gamma = \varphi([0,1])$ mit $\varphi : [0,1], t \mapsto (t, t^5)^\top$.

6. Aufgabe: (*Funktionenfolgen, Bachelor-Aufgabe*)

Untersuchen Sie, die Funktionsfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

7. Aufgabe: (*Satz von Fubini, Bachelor-Aufgabe*)

Berechnen Sie für

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

die Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dx \right)\ dy \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dy \right)\ dx$$

Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Hinweis: Zeigen Sie erst:

$$f(x,y) = \partial_y \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \partial_x \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

Stetigkeit und Topologie

1. Aufgabe: (*Einstieg*)
Welche Aussagen sind wahr?

- ☐ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [-1,1], \frac{x}{y} = 1\}$ ist eine kompakte Teilmenge vom $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Sei $A \subseteq \mathbb{Q}$. Dann ist A keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
- ☐ *Für Bachelor:* Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.
- ☐ *Für Bachelor:* Der metrische Raum $(\mathbb{Q}, d)$ mit $d(x,y) := |x-y|$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

2. Aufgabe: (*Stetigkeit*)
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$

b) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|_2$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}, & \text{für } x \neq -y \\ 0, & \text{für } x = -y \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Aufgabe: (*Beweisen*)

a) Zeigen, Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass eine stetige Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ einen Fixpunkt besitzt.

b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann existiert $L > 0$, sodass für alle $x, y \in [a,b]$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

Zusatz: Begründen Sie, dass auch die Stetigkeit ausreichend wäre.

4. Aufgabe: (*Banachscher Fixpunktsatz*)

a) Geben Sie die Definition einer Kontraktion an und was man unter einem Fixpunkt versteht.

b) Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen kontraktiv sind und welche einen Fixpunkt besitzen.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{a \cdot \log(x+b)} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\|x\|_2}$$
$$f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \frac{x + 0.5}{x + 1}$$

5. Aufgabe: (*Metriken und Normen*)

a) *Für Bachelor:* Beweisen Sie, dass folgende Abbildung d auf jeder Menge X mit endlich vielen Elementen eine Metrik definiert.

$$d : X \times X \to \mathbb{N},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

b) Überprüfen Sie, welche Eigenschaften einer Norm folgende Abbildung hat:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ (x_1, \dots, x_d) \mapsto \max_{i \in \{1, \dots, d\}} x_i$$

c) Geben sie eine Norm für den Vektorraum $\mathbb{C}^d$ an.

6. Aufgabe: (*Topologie*)
Seien $X = \mathbb{R}^d$ mit der euklidischen Norm und $A \subset X$ gegeben.

a) Sei $A \subset X$ beschränkt und c_n eine Folge in A. Hat c_n einen Häufungspunkt, und wenn ja wo?

b) Beweisen Sie folgende Aussage: $\overline{A^\circ} \backslash A^\circ = \overline{A} \backslash (A \backslash (A^\circ)^c)$

c) Beweisen Sie folgende Aussage: $(X \backslash A)^\circ = X \backslash \overline{A}$

Differentialrechnung

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend ist, gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- ☐ Wenn $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton steigend ist, gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$.
- ☐ Wenn $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(5)}(a) = 0$ und $f^{(6)}(a) > 0$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dann hat f in a ein lokales Minimum.
- ☐ Jede stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist (total) differenzierbar.

2. Aufgabe: (*Totale und partielle Differenzierbarkeit*)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt (0,0) (total) differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt (0,0) in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ eine Ableitung besitzt (also insbesondere partiell differenzierbar ist), aber nicht (total) differenzierbar ist.

3. Aufgabe: (*Mehrdimensionale Kettenregel*)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & f(x,y) &= (x-y, xy^2), \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & g(x,y) &= (e^{xy}, \sin(x) \cdot \cos(y)). \end{aligned}$$

Geben Sie die Abbildung $g \circ f$ an und berechnen Sie daraus unter expliziter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel $D(g \circ f)(x,y)$.

4. Aufgabe: (*Extremwerte*)

a) Geben Sie alle lokalen und globalen Extrema von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y$$

an.

b) Was müssen Sie beachten, wenn die Funktion aus a) auf den Definitionsbereich

$$D = [0,5] \times [0,5] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$$

eingeschränkt wird und Sie erneut alle lokalen und globalen Extrema angeben sollen? (Wenn Sie wollen, können Sie diese auch berechnen.)

5. Aufgabe: (*Mittelwertsatz*)

Beweisen Sie unter Nutzung des Mittelwertsatzes folgende Ungleichung:

$$\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}} \qquad \text{für } x > 0$$

Hinweis: Betrachten Sie die Differenzfunktion $f(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ im Intervall $t \in [0,x]$.

Anwendungen der Differentialrechnung

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Mit dem Taylorpolynom von f in x_0 der Ordnung 1 kann man die Tangente an den Funktionsgraphen von f in x_0 beschreiben.
- ☐ Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv sind, dann ist auch $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x) = (f(x), g(x))$ bijektiv.
- ☐ Es gibt $f : M \to \mathbb{R}$ und eine unbeschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass f auf M sein Minimum und Maximum annimmt.
- ☐ Es gibt $f : M \to \mathbb{R}$ und eine beschränkte, abgeschlossene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass f auf M sein Minimum und Maximum nicht annimmt.

2. Aufgabe: (*Taylorpolynome*)

a) Seien gegeben

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

und der Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_1(f, x_0)$ und $T_2(f, x_0)$ der Ordnung 1 und 2 in x_0 und begründen Sie, dass der Fehler $|f(x) - T_1(f, x_0)(x)|$ im Intervall

$$I = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$$

kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

b) *Nur Bachelor:* Beweisen Sie mit der Taylorentwicklung der Ordnung 1 von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$$

in $(0, 0)$, dass die Aussage

$$\sin(x)\cos(y) - x = o(\|(x, y)\|_2)$$

wahr ist.

3. Aufgabe: (*Umkehrsatz und implizite Funktionen*)

a) Begründen Sie, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos(x_2) \\ e^{x_1}\sin(x_2) \end{pmatrix}$$

nicht injektiv ist, es aber eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \in U$ gibt, sodass $f : U \to f(U)$ bijektiv ist. Geben Sie eine Beispielmenge U an, für die die Aussage wahr ist.

b) Untersuchen Sie, ob sich die Gleichung

$$x^2 + y^3 + z^4 = x + z$$

nahe $P = (1, 0, 1)$ nach $z = g(x, y)$ auflösen lässt. Wenn ja, berechnen Sie $\partial_y g(1, 0)$.

c) Begründen Sie, dass das Gleichungssystem

$$2x + y + z = 0 \qquad\qquad xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

eindeutig nach $y = g(x)$ und $z = h(x)$ nahe $P = (0, 1, -1)$ auflösbar ist.

4. Aufgabe: (*Lagrangesche Multiplikatorenmethode und Untermannigfaltigkeiten*)

Seien die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, z) = 3x^2 - 4y + 2z$$

gegeben

a) Begründen Sie, dass f sein Minimum und Maximum auf M annimmt.

b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatorenmethode von Lagrange

$$\min_{x \in M} f(x) \qquad \text{und} \qquad \max_{x \in M} f(x)$$

c) *Für Bachelor:* Beweisen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Welche Dimension hat M?

5. Aufgabe: (*Extremwerte und konvexe Funktionen, Bachelor-Aufgabe*)

Seien die konvexe Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y) = x^4 + y^2 + x^2\cos(y)$$

gegeben

a) Zeigen Sie, dass f auf M konvex und stetig differenzierbar ist.

b) Was gilt für stationäre Punkte von f in M?

c) Berechnen Sie

$$\min_{x \in M} f(x)$$