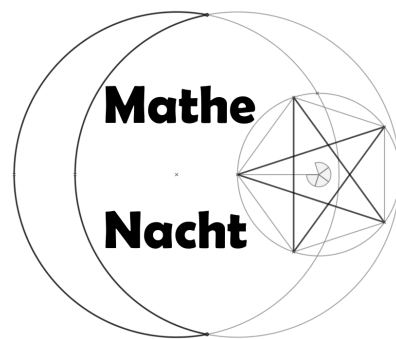
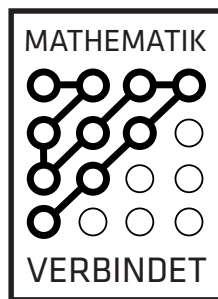


# Wiederholung



## 1. Aufgabe:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- $\mathbb{Q}$  ist als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  weder offen, noch abgeschlossen.
- Jede Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  mit unendlich vielen Elementen ist überabzählbar.
- Jede Folge mit nur einem Häufungspunkt ist konvergent.
- Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  konvergiert genau dann, wenn  $(x_n)$  konvergiert.
- Konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  absolut, dann konvergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

## 2. Aufgabe: (Vollständige Induktion)

a) Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Zeigen Sie für

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die  $n$ -te Ableitung von  $f$  gleich

$$(-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} + (n-1)! (1-x)^{-n}$$

ist für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Bestimmen Sie die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0 = 0$ .

## 3. Aufgabe: (Zahlenfolgen)

Sei  $(a_n)$  eine reelle Zahlenfolge mit Grenzwert  $a > 0$ . Beweisen Sie, dass es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \geq N$  auch  $a_n > 0$  gilt.

Zusatz: Gilt auch die Umkehrung? Folgt aus der Tatsache, dass  $a_n > 0, \forall n \geq N$ , gilt, dass  $(a_n)$  gegen einen Grenzwert  $a > 0$  konvergiert?

**4. Aufgabe:** (Reihen)

a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{-n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^5}{6n^8 + \sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^3}$$

Hinweis:  $\log(n) \leq n$  und  $\log$  ist der natürliche Logarithmus.

b) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren die folgenden Reihen? Für welche konvergieren sie absolut?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

**5. Aufgabe:** (Komplexe Folgen und Reihen)

a) Sei die komplexe Folge  $(a_n)$  mit

$$a_n = \left(\frac{i}{3-i}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gegeben. Begründen Sie, dass  $(a_n)$  und  $\sum_{k=0}^n a_k$  konvergieren.

b) Zeigen Sie, dass die Folge  $(b_n)$  mit

$$b_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

keine Cauchyfolge ist.

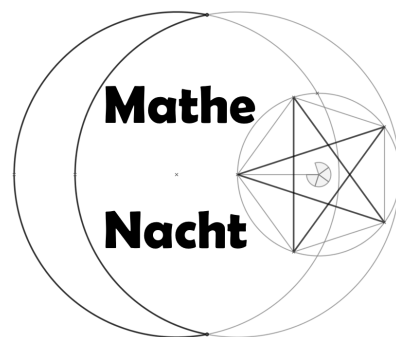
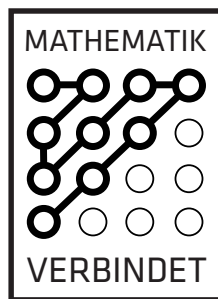
**6. Aufgabe:** (Die Exponentialreihe)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit den Reihendarstellungen der Exponential- und der Kosinus-Funktion.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\cos(x) - 1}$$

Welche Methode gibt es noch, um die Grenzwerte zu berechnen?

# Integration



## 1. Aufgabe: (Einstieg)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Die Ableitung der Funktion  $G : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$G(x) = \int_1^{1/x} \frac{e^t}{t} dt$$

ist  $G'(x) = \frac{-e^x}{x^3}$ .

- Wenn  $f^2$  Riemann-integrierbar in  $[a, b]$  ist, dann ist auch  $f$  Riemann-integrierbar.  
 Wenn  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x > 0$  gilt und

$$\int_0^\infty g(x) dx$$

konvergiert, dann konvergiert auch

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

## 2. Aufgabe: (Substitution und partielle Integration)

Berechnen Sie folgende Integrale (Dabei ist  $\ln(x)$  der natürliche Logarithmus)

$$\int_0^1 e^{3x} \sin(2x) dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x^3 + 1} dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)^3}{1 + \sin(x)} dx$$

## 3. Aufgabe: (Uneigentliche Integrale)

Existieren folgende uneigentliche Integrale? Begründen Sie.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

**4. Aufgabe:** (*Kurven und ihre Länge*)

Sei die Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) := (\cosh(t), \sinh(t), t)$  gegeben. Berechnen Sie die Länge von  $\gamma$ .

Hinweis:  $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$  und

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

**5. Aufgabe:** (*Kurvenintegrale, Lehramts-Aufgabe*)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{8x^2 + 3y^2}$$

bzgl. der Kurve  $\gamma = \varphi([0, 1])$  mit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 2t)^\top$ .

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art von  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

bzgl. der Kurve  $\gamma = \varphi([0, 1])$  mit  $\varphi : [0, 1], t \mapsto (t, t^5)^\top$ .

**6. Aufgabe:** (*Funktionenfolgen, Bachelor-Aufgabe*)

Untersuchen Sie, die Funktionsfolge

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

**7. Aufgabe:** (*Satz von Fubini, Bachelor-Aufgabe*)

Berechnen Sie für

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

die Integrale

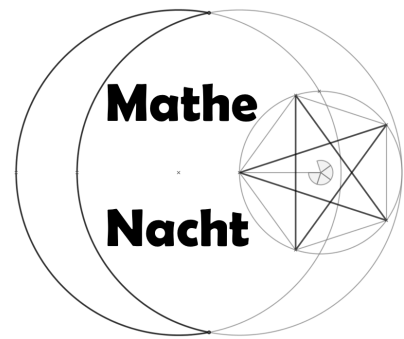
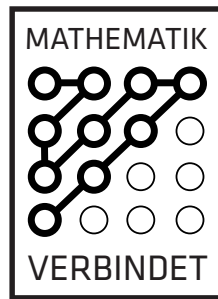
$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$$

Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Hinweis: Zeigen Sie erst:

$$f(x, y) = \partial_y \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \partial_x \left( \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

# Stetigkeit und Topologie



## 1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Welche Aussagen sind wahr?

- $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [-1, 1], \frac{x}{y} = 1\}$  ist eine kompakte Teilmenge vom  $\mathbb{R}^2$ .
- Sei  $A \subseteq \mathbb{Q}$ . Dann ist  $A$  keine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .
- Für Bachelor: Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig.
- Für Bachelor: Der metrische Raum  $(\mathbb{Q}, d)$  mit  $d(x, y) := |x - y|$  ist ein vollständiger metrischer Raum.

## 2. Aufgabe: (*Stetigkeit*)

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit.

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$
- b)  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2$
- c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}, & \text{für } x \neq -y \\ 0, & \text{für } x = -y \end{cases}$
- d)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

## 3. Aufgabe: (*Beweisen*)

- a) Zeigen, Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  einen Fixpunkt besitzt.
- b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, dann existiert  $L > 0$ , sodass für alle  $x, y \in [a, b]$  gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Zusatz: Begründen Sie, dass auch die Stetigkeit ausreichend wäre.

**4. Aufgabe:** (*Banachscher Fixpunktsatz*)

- a) Geben Sie die Definition einer Kontraktion an und was man unter einem Fixpunkt versteht.  
b) Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen kontraktiv sind und welche einen Fixpunkt besitzen.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{a \cdot \log(x+b)} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\|x\|_2}$$

$$f_3 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto \frac{x + 0.5}{x + 1}$$

**5. Aufgabe:** (*Metriken und Normen*)

- a) *Für Bachelor:* Beweisen Sie, dass folgende Abbildung  $d$  auf jeder Menge  $X$  mit endlich vielen Elementen eine Metrik definiert.

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

- b) Überprüfen Sie, welche Eigenschaften einer Norm folgende Abbildung hat:

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \mapsto \max_{i \in \{1, \dots, d\}} x_i$$

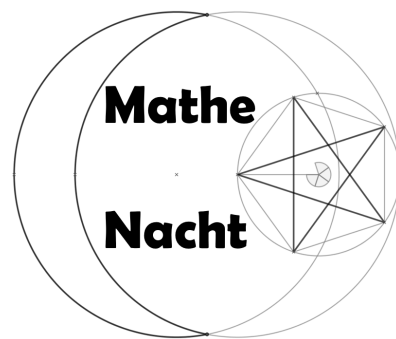
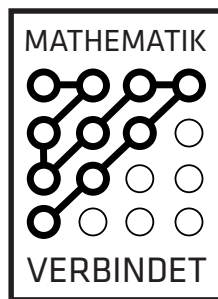
- c) Geben sie eine Norm für den Vektorraum  $\mathbb{C}^d$  an.

**6. Aufgabe:** (*Topologie*)

Seien  $X = \mathbb{R}^d$  mit der euklidischen Norm und  $A \subset X$  gegeben.

- a) Sei  $A \subset X$  beschränkt und  $c_n$  eine Folge in  $A$ . Hat  $c_n$  einen Häufungspunkt, und wenn ja wo?  
b) Beweisen Sie folgende Aussage:  $\overline{A^\circ} \setminus A^\circ = \overline{A} \setminus (A \setminus (A^\circ)^c)$   
c) Beweisen Sie folgende Aussage:  $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$

# Differentialrechnung



## 1. Aufgabe: (Einstieg)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton steigend ist, gilt  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .
- Wenn  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und streng monoton steigend ist, gilt  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .
- Wenn  $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(5)}(a) = 0$  und  $f^{(6)}(a) > 0$  für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt, dann hat  $f$  in  $a$  ein lokales Minimum.
- Jede stetig partiell differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ist (total) differenzierbar.

## 2. Aufgabe: (Totale und partielle Differenzierbarkeit)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt  $(0,0)$  (total) differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt  $(0,0)$  in jede Richtung  $v \in \mathbb{R}^2$  eine Ableitung besitzt (also insbesondere partiell differenzierbar ist), aber nicht (total) differenzierbar ist.

## 3. Aufgabe: (Mehrdimensionale Kettenregel)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f(x, y) &= (x - y, xy^2), \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & g(x, y) &= (e^{xy}, \sin(x) \cdot \cos(y)). \end{aligned}$$

Geben Sie die Abbildung  $g \circ f$  an und berechnen Sie daraus unter expliziter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel  $D(g \circ f)(x, y)$ .

**4. Aufgabe:** (*Extremwerte*)

a) Geben Sie alle lokalen und globalen Extrema von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y$$

an.

b) Was müssen Sie beachten, wenn die Funktion aus a) auf den Definitionsbereich

$$D = [0, 5] \times [0, 5] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$$

eingeschränkt wird und Sie erneut alle lokalen und globalen Extrema angeben sollen? (Wenn Sie wollen, können Sie diese auch berechnen.)

**5. Aufgabe:** (*Mittelwertsatz*)

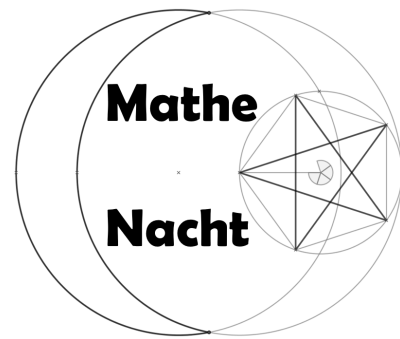
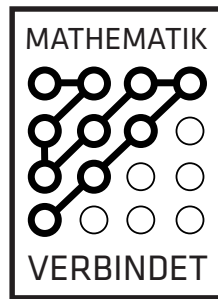
Beweisen Sie unter Nutzung des Mittelwertsatzes folgende Ungleichung:

$$\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{für } x > 0$$

Hinweis: Betrachten Sie die Differenzfunktion  $f(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$  im Intervall  $t \in [0, x]$ .



# Anwendungen der Differentialrechnung



## 1. Aufgabe: (Einstieg)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Mit dem Taylorpolynom von  $f$  in  $x_0$  der Ordnung 1 kann man die Tangente an den Funktionsgraphen von  $f$  in  $x_0$  beschreiben.
- Wenn  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv sind, dann ist auch  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $h(x) = (f(x), g(x))$  bijektiv.
- Es gibt  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und eine unbeschränkte Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^d$ , sodass  $f$  auf  $M$  sein Minimum und Maximum annimmt.
- Es gibt  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und eine beschränkte, abgeschlossene Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^d$ , sodass  $f$  auf  $M$  sein Minimum und Maximum nicht annimmt.

## 2. Aufgabe: (Taylorpolynome)

a) Seien gegeben

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

und der Entwicklungspunkt  $x_0 = \pi$ . Bestimmen Sie die Taylorpolynome  $T_1(f, x_0)$  und  $T_2(f, x_0)$  der Ordnung 1 und 2 in  $x_0$  und begründen Sie, dass der Fehler  $|f(x) - T_1(f, x_0)(x)|$  im Intervall

$$I = \left[ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right]$$

kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist.

b) *Nur Bachelor:* Beweisen Sie mit der Taylorentwicklung der Ordnung 1 von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

in  $(0, 0)$ , dass die Aussage

$$\sin(x) \cos(y) - x = o(\|(x, y)\|_2)$$

wahr ist.

**3. Aufgabe:** (*Umkehrsatz und implizite Funktionen*)

a) Begründen Sie, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos(x_2) \\ e^{x_1} \sin(x_2) \end{pmatrix}$$

nicht injektiv ist, es aber eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  mit  $0 \in U$  gibt, sodass  $f : U \rightarrow f(U)$  bijektiv ist. Geben Sie eine Beispielmenge  $U$  an, für die die Aussage wahr ist.

b) Untersuchen Sie, ob sich die Gleichung

$$x^2 + y^3 + z^4 = x + z$$

nahe  $P = (1, 0, 1)$  nach  $z = g(x, y)$  auflösen lässt. Wenn ja, berechnen Sie  $\partial_y g(1, 0)$ .

c) Begründen Sie, dass das Gleichungssystem

$$2x + y + z = 0 \quad xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

eindeutig nach  $y = g(x)$  und  $z = h(x)$  nahe  $P = (0, 1, -1)$  auflösbar ist.

**4. Aufgabe:** (*Lagrangesche Multiplikatorenmethode und Untermannigfaltigkeiten*)

Seien die Menge  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$  und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = 3x^2 - 4y + 2z$$

gegeben

a) Begründen Sie, dass  $f$  sein Minimum und Maximum auf  $M$  annimmt.

b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatorenmethode von Lagrange

$$\min_{x \in M} f(x) \quad \text{und} \quad \max_{x \in M} f(x)$$

c) *Für Bachelor:* Beweisen Sie, dass  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Welche Dimension hat  $M$ ?

**5. Aufgabe:** (*Extremwerte und konvexe Funktionen, Bachelor-Aufgabe*)

Seien die konvexe Menge  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x^4 + y^2 + x^2 \cos(y)$$

gegeben

a) Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $M$  konvex und stetig differenzierbar ist.

b) Was gilt für stationäre Punkte von  $f$  in  $M$ ?

c) Berechnen Sie

$$\min_{x \in M} f(x)$$